

# 赋有向图凸度量空间的 Mann 迭代算法

杨 妮, 陈丽丽

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

**摘 要:** 赋有向图的度量空间相比于一般的度量空间, 在空间结构上更为复杂, 有向图本身并不具有线性结构, 在探究映射不动点的逼近问题上难度相对较大, 从而受到了众多学者的广泛关注。首次通过在该空间中引入凸结构, 给出了赋有向图凸度量空间的概念, 并在该空间中得到  $G$ -单调非扩张映射在 Mann 迭代下生成序列的收敛性定理, 并给出反例说明 Mann 迭代下生成序列不一定收敛到  $G$ -单调非扩张映射的不动点。

**关键词:** 赋有向图凸度量空间; 凸结构; Mann 迭代算法

**DOI:** 10.15938/j.jhust.2021.01.020

**中图分类号:** O177.2      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1007-2683(2021)01-0139-05

## Mann Iterative Algorithm in Convex Metric Spaces Endowed with a Directed Graph

YANG Ni, CHEN Li-li

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

**Abstract:** Compared to the general metric space, the metric space endowed with a directed graph is more complex in space structure, and the directed graph itself does not have a linear structure, and it is relatively difficult to explore the problems of the fixed points of the mappings. In this paper, the convex structure is introduced in the metric space endowed with a directed graph for the first time, and the convex metric spaces endowed with a directed graph is defined. Moreover, the convergence theorem of the sequence which is generated by the Mann iterative algorithm of  $G$ -monotone nonexpansive mappings is obtained. Furthermore, an example is given to illustrate that the sequence generated by Mann iteration does not necessarily converge to the fixed point of  $G$ -monotone nonexpansive mapping.

**Keywords:** metric space endowed with a directed graph; convex structure; Mann iterative algorithm

## 0 引 言

20 世纪初期, 波兰数学家 Banach<sup>[1]</sup> 首次给出了 Banach 不动点定理并且利用 Picad 迭代证明了这个

定理, 也称作“压缩映射原理”。2004 年, Ran 和 Reuring<sup>[2]</sup> 根据 Sayed 和 Ran<sup>[3]</sup> 于 2002 年发表的关于一类特殊微分方程解的迭代方法一文中的不动点内容将压缩映射原理推广到偏序集, 在其上讨论了一类单调、序连续的压缩型映射的不动点问题, 并将结

收稿日期: 2019-01-08

基金项目: 国家自然科学基金(11401141); 黑龙江省高校青年创新人才培养计划(UNPYSCT-2017078); 黑龙江省博士后科研启动基金(LBH-Q18067)。

作者简介: 陈丽丽(1982—), 女, 博士, 副教授, 博士研究生导师。

通信作者: 杨 妮(1995—), 女, 硕士研究生, E-mail: 1342323863@qq.com.

果应用于非线性矩阵方程解的存在性和唯一性问题,从而引起了国内外数学学者对偏序度量空间上各种非扩张型单值映射和非扩张型集值映射不动点问题的广泛关注。2005年,Nieto和Rodriguez<sup>[6]</sup>扩展了Ran的关于不动点理论的研究内容,并且用所获得的研究成果解决一些微分方程的问题。2008年,Jachymski<sup>[6]</sup>将Banach压缩映射原理推广到赋有向图的度量空间,2009年,Gwóźdz-Lukawska和Jachymski在赋有向图度量空间中发展了Hutchinson-Barnsley有限映射族理论<sup>[6]</sup>,2010年,Bojor在赋有向图度量空间中研究了 $\varphi$ -压缩的不动点理论<sup>[7-8]</sup>。图论与不动点理论有机结合,开启了研究度量空间中不动点问题的新篇章<sup>[9-14]</sup>。

1970年,Takahashi<sup>[17-18]</sup>引入凸结构的概念,定义了凸度量空间并研究了非扩张映射的不动点定理。1972年和1983年,Kirk和Goebel<sup>[19]</sup>分别研究了凸度量空间中收敛序列的迭代问题。1993年,Ćirić<sup>[20]</sup>给出了凸度量空间中非扩张映射的不动点定理,并引入了CIP性质。1997年,Chosh和Dehnanath<sup>[21]</sup>将前期的研究成果推广到凸度量空间映射族序列的情形。2001年,Liu Q<sup>[22]</sup>推广了Petryshgh和Williamson在1973年的结果,得到了凸度量空间中迭代序列收敛于不动点的条件。2005年,Ćirić等<sup>[23]</sup>在凸度量空间中引入Hausdorff度量,通过构造Hausdorff不等式得到了在凸度量空间中两个多值映射公共不动点定理。2010年,Khan等<sup>[24]</sup>引入拟非扩张映射概念,通过两种不同的迭代方式,得到了凸度量空间中的不动点定理。同年,Chao W等<sup>[25]</sup>引入广义凸度量的概念,将凸度量空间中的一些结果推广到广义凸度量空间。关于凸度量空间的研究仍在继续。

由于有向图本身不具备线性结构,这使得赋有向图的度量空间的空间结构更为复杂,在探究映射不动点的问题上难度相对较大。在赋有向图的度量空间中推广已有的不动点定理和迭代算法,对进一步完善不动点理论具有一定的价值和意义。本文首次在该空间中引入凸结构,给出了赋有向图凸度量空间的概念,并在该空间中得到G-单调非扩张映射在Mann迭代下生成序列的收敛性定理,并给出反例说明Mann迭代下生成序列不一定收敛到G-单调非扩张映射的不动点。

## 1 预备知识

定义1 设 $(X, d)$ 为度量空间,连续映射 $W: X$

$\times X \times [0, 1] \rightarrow X$ ,若对于所有的 $x, y, u \in X, \lambda \in [0, 1]$ 有如下不等式成立: $d(u, W(x, y; \lambda)) \leq \lambda d(u, x) + (1 - \lambda) d(u, y)$ 则称该映射为凸结构,将 $(X, d, W)$ 称作凸度量空间。

易知,Banach空间及其凸子集为凸度量空间,但Frechet空间不一定为凸度量空间。

有序对 $(V(G), E(G))$ 构成图 $G$ ,其中 $V(G)$ 为顶点集,称之为点集, $E(G)$ 为 $V(G)$ 中元素的二元关系,称之为边集。若每个顶点自身可构成边,即 $(x, x) \in E(G)$ ,则称图 $G$ 具有反身性。若图的每条边都规定了方向,则图 $G$ 为有向图,否则称为无向图。此外,将两点间的距离作为权值赋予每条边。我们记 $G^{-1}$ 为反转图 $G$ 的方向所得到的图,即

$$E(G^{-1}) = \{(y, x) : (x, y) \in E(G)\}$$

在本文中,我们令

$$E(\tilde{G}) = E(G) \cup E(G^{-1})$$

则 $\tilde{G}$ 是一个对称的有向图。本文中所涉及均为对称的有向图,仍记为 $G$ 。

定义2 称有向图 $G$ 具有传递性,是指对 $\forall x, y, z \in E(G)$ 有

$$(x, y) \in E(G) \text{ 且 } (y, z) \in E(G) \\ \Rightarrow (x, z) \in E(G)$$

定义3 设 $\{x_n\} \in V(G)$ ,有如下定义

- 1) 称 $\{x_n\} \in V(G)$ 是 $G$ -递增的,若 $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ ;
- 2) 称 $\{x_n\} \in V(G)$ 是 $G$ -递减的,若 $(x_{n+1}, x_n) \in E(G)$ ;
- 3)  $G$ -递增或 $G$ -递减序列统称为 $G$ -单调序列。

定义4 加权有向图 $(G, d)$ 为 $G$ -完备当且仅当任一柯西列 $\{x_n\}$ 收敛到 $x \in V(G)$ 。

定义5 设 $T: V(G) \rightarrow V(G)$ 为 $G$ -单调非扩张映射,若满足以下两个条件:

- 1)  $T$ 为 $G$ -单调映射, $(x, y) \in E(G)$ 时 $(T(x), T(y)) \in E(G)$
- 2)  $T$ 为非扩张映射,即 $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$

在本文中,均假设图 $G$ 具有反身性和传递性。

## 2 主要结果

在一般的线性空间中,Mann迭代格式定义如下:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n$$

下面将利用凸结构将 Mann 迭代格式引入到赋有向图度量空间中。

**定义 6** 设  $(G, d)$  为赋有向图度量空间, 连续映射

$$W: V(G) \times V(G) \times [0, 1] \rightarrow V(G)$$

若对于  $\forall x, y, u \in V(G), \alpha \in [0, 1]$  有以下不等式成立:

$$d(u, W(x, y; \alpha)) \leq \alpha d(u, x) + (1 - \alpha) d(u, y)$$

则称  $(G, d, W)$  为赋有向图凸度量空间。

**性质 1** 对任意  $x, y \in V(G)$  和  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ , 有

$$d(x, y) = d(x, W(x, y; \alpha)) + d(W(x, y; \alpha), y)$$

**证明:** 由于  $(G, d, W)$  为凸度量空间, 故有

$$d(x, y) \leq d(x, W(x, y; \alpha)) + d(W(x, y; \alpha), y) \leq \alpha d(x, x) + (1 - \alpha) d(x, y) + \alpha d(x, y) + (1 - \alpha) d(y, y) = d(x, y)$$

注意到对任意  $x, y \in V(G)$  和  $\alpha \in [0, 1]$ , 有

$$d(x, y) = d(x, W(x, y; \alpha)) + d(W(x, y; \alpha), y)$$

$$d(x, W(x, y; \alpha)) = (1 - \alpha) d(x, y)$$

$$d(W(x, y; \alpha), y) = \alpha d(x, y)$$

**证毕。**

**性质 2** 对任意  $(x, y) \in E(G)$ , 若  $u \in [x, y]$ , 则

$$(x, u) \in E(G), (u, y) \in E(G)$$

**注:** 设  $(x, y) \in E(G)$ , 若有  $u \in V(G)$  及  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 使得  $d(x, u) = (1 - \alpha) d(x, y)$  且  $d(u, y) = \alpha d(x, y)$ , 则记  $u \in [x, y]$ 。

**例 1** 设  $x, y$  为实数轴  $R$  上任意两点, 定义

$$E(G) = \{(x, y) : x \leq y \text{ 或 } y \leq x\}$$

$$V(G) = R, d(x, y) = |x - y|$$

取  $u \in [x, y]$ , 其中

$$[x, y] = \{z : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in [0, 1]\}$$

则  $(x, u) \in E(G)$  且  $(u, y) \in E(G)$ 。

**引理 1** 设赋有向图凸度量空间  $(G, d, W)$  满足性质 2,  $T: V(G) \rightarrow V(G)$  为  $G$ -单调映射, 若  $(x_1, T x_1) \in E(G)$ , 定义

$$x_{n+1} = W(x_n, T x_n; \alpha_n)$$

则对任意自然数  $i, j, k, x_i, x_j, T x_k$  可两两构成边。

**证明:** 由题意及性质 1 知

$$d(x_1, x_2) = d(x_1, W(x_1, T x_1; \alpha_1)) =$$

$$(1 - \alpha_1) d(x_1, T x_1)$$

$$d(T x_1, x_2) = d(T x_1, W(x_1, T x_1; \alpha_1)) =$$

$$\alpha_1 d(T x_1, x_1)$$

则  $x_2 \in [x_1, T x_1]$ 。利用性质 2 可知

$$(x_1, x_2) \in E(G), (x_2, T x_1) \in E(G)$$

由  $T$  为  $G$ -单调映射知

$$(T x_1, T x_2) \in E(G)$$

利用图的传递性可得

$$(x_2, T x_2) \in E(G)$$

依次进行下去, 对任意自然数  $p$ , 有

$$x_{p+1} \in [x_p, T x_p]$$

$$(x_p, x_{p+1}) \in E(G), (x_{p+1}, T x_p) \in E(G)$$

$$(T x_p, T x_{p+1}) \in E(G), (x_{p+1}, T x_{p+1}) \in E(G)$$

即对任意自然数  $i, j, k, x_i, x_j, T x_k$  可两两构成边, 证毕。

**定理 1** 设  $(G, d, W)$  为  $G$ -完备的赋有向图凸度量空间且满足性质 2,  $T: V(G) \rightarrow V(G)$  为  $G$ -单调非扩张映射, 则利用如下 Mann 迭代格式

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = W(x_n, T x_n; \alpha_n) \end{cases}$$

可构造序列  $\{x_n\}$ ,  $x_n \rightarrow x \in V(G)$ , 其中  $(x_1, T(x_1))$

$$\in E(G), 0 \leq 1 - \alpha_n \leq \frac{1}{2^n}, \alpha_n \in [0, 1]。$$

**证明:** 由引理 1 知, 对任意自然数  $i, j, k, x_i, x_j, T x_k$  可两两构成边。

任意相邻两点间距离为

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, W(x_n, T x_n; \alpha_n)) = (1 - \alpha_n) d(x_n, T x_n)$$

注意到

$$\begin{aligned} d(x_n, T x_n) &\leq d(x_n, T x_{n-1}) + d(T x_{n-1}, T x_n) \leq \\ &d(W(x_{n-1}, T x_{n-1}; \alpha_{n-1}), T x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n) = \\ &\alpha_{n-1} d(x_{n-1}, T x_{n-1}) + (1 - \alpha_{n-1}) d(x_{n-1}, T x_{n-1}) = \\ &d(x_{n-1}, T x_{n-1}) = \cdots = d(x_1, T x_1) \end{aligned}$$

考虑点  $x_n, x_{n+p}, p$  为任意整数:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq$$

$$[(1 - \alpha_n) + (1 - \alpha_{n+1}) + \cdots + (1 - \alpha_{n+p-1})] d(x_1, T x_1) \leq$$

$$\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p-1}}\right) d(x_1, T x_1) =$$

$$\frac{(1/2^n)(1 - (1/2)^p)}{1 - 1/2} d(x_1, T x_1)$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $d(x_n, x_{n+p}) \rightarrow 0$ , 则  $\{x_n\}$  为 Cauchy 列。

由空间的  $G$ -完备性知

$$x_n \rightarrow x \in V(G)$$

**证毕。**

注:在定理1的条件下能够保证 Mann 迭代下生成序列是收敛的,但没能证明该序列一定收敛到  $G$  - 单调非扩张映射的不动点。事实上,通过下面的例子可见定理1中 Mann 迭代下生成序列不一定收敛到  $G$  - 单调非扩张映射的不动点。

引理2<sup>[4]</sup> 如果从某个  $n$  起都有  $a_n > 0$  (或者  $-1 < a_n < 0$ ),那么  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  同敛散。

例2 设  $V(G) = [0, 1]$ , 对任意  $x \in V(G)$ ,

$Tx = \frac{x}{2}$ , 定义集合

$$E(G) = \{ (x, y) : x \leq y \text{ 或 } y \leq x \}$$

选取初始值  $x_1 = 1$ , 则  $Tx_1 = \frac{1}{2}$ , 从而

$$(x_1, Tx_1) \in E(G)$$

令  $x_{n+1} = W(x_n, Tx_n; \alpha_n)$ , 这里  $\alpha_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ . 设  $d$

为欧式距离, 定义为

$$d(x, z) = |x - z|$$

下证  $x_n \rightarrow x \in V(G)$ , 但  $x$  不是  $T$  在  $V(G)$  上的不动点。

证明: 由于  $x_1 = 1, Tx_1 = \frac{1}{2}$ , 则

$$d(x_1, Tx_1) = \frac{1}{2}$$

$$d(x_1, x_2) = d(x_1, W(x_1, Tx_1; \alpha_1)) =$$

$$(1 - \alpha_1) d(x_1, Tx_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$d(Tx_1, x_2) = d(Tx_1, W(x_1, Tx_1; \alpha_1)) =$$

$$\alpha_1 d(x_1, Tx_1) = (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

从而

$$x_2 = x_1 - d(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

$$Tx_2 = \frac{x_2}{2} = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2^2}) = \frac{3}{8}$$

$$d(x_2, Tx_2) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2^2}) = \frac{3}{8}$$

计算得:

$$d(x_2, x_3) = (1 - \alpha_2) d(x_2, Tx_2) =$$

$$\frac{1}{2^2} \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2^2}) = \frac{1}{2^3} (1 - \frac{1}{2^2})$$

$$d(Tx_2, x_3) = \alpha_2 d(x_2, Tx_2) =$$

$$(1 - \frac{1}{2^2}) \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2^2})$$

则

$$x_3 = x_2 - d(x_2, x_3) =$$

$$(1 - \frac{1}{2^2}) - [\frac{1}{2^3} (1 - \frac{1}{2^2})] =$$

$$(1 - \frac{1}{2^3}) (1 - \frac{1}{2^2})$$

$$Tx_3 = \frac{x_3}{2} = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2^2}) (1 - \frac{1}{2^3})$$

$$d(x_3, Tx_3) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2^2}) (1 - \frac{1}{2^3})$$

依次进行可知当  $k = n - 1$  时:

$$d(x_{n-1}, x_n) = (1 - \alpha_{n-1}) d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) =$$

$$(1 - \alpha_{n-1}) \frac{x_{n-1}}{2} =$$

$$\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^{n-2} [1 - \frac{1}{2^{i+1}}]$$

$$d(Tx_{n-1}, x_n) = \alpha_{n-1} \frac{x_{n-1}}{2} =$$

$$(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n-2} [1 - \frac{1}{2^{i+1}}]$$

则

$$x_n = x_{n-1} - d(x_{n-1}, x_n) =$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} [1 - \frac{1}{2^{(i+1)}}] = \prod_{i=2}^n [1 - \frac{1}{2^i}]$$

$$Tx_n = \frac{1}{2} \prod_{i=2}^n [1 - \frac{1}{2^i}]$$

当  $n$  充分大时,

$$\prod_{i=2}^n (1 - \frac{1}{2^i}) < \prod_{i=2}^n [1 - \frac{1}{2^i}] < 1 \text{ 且}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=2}^n (1 - \frac{1}{2^i}) = \frac{1}{2}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$$

由引理2知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=2}^n [1 - \frac{1}{2^i}]$  存在,

则

$$x_n \rightarrow x \neq 0 \in V(G),$$

$$Tx_n \rightarrow \frac{x}{2} \neq 0 \in V(G)$$

故  $x$  不是  $T$  在  $V(G)$  上的不动点, 证毕。

### 3 结 语

主要在赋有向图的度量空间中引入凸结构, 给出该空间中  $G$  - 单调非扩张映射在 Mann 迭代下生

成序列的收敛性定理,并给出反例说明该序列不一定收敛到  $G$  - 单调非扩张映射的不动点。可以在此基础上,继续考虑其他映射是否可以收敛到不动点以及其他迭代格式的收敛性问题。

## 参 考 文 献:

- [1] BANACH S. Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits et Leur Application Aux Équations Intégrales [J]. Fundamenta Mathematicae, 1922 ( 3 ): 133.
- [2] RAN A, REURINGS M. A Fixed Point Theorem in Partially Ordered Sets and Some Applications to Matrix Equations [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2004, 132: 1435.
- [3] SAYED S, RAN A. On an Iteration Method or Solving a Class of Nonlinear Matrix Equations [J]. SIAMJ. Matrix Anal. Appl., 2006, 23: 632.
- [4] NIETO J, LÓPEZ R. Contractive Mapping Theorems in Partially Ordered Sets and Applications to Ordinary Differential Equations [J]. Order, 2005, 22: 223.
- [5] JACHYMSKI J. The Contraction Principle for Mappings on a Metric Space with a Graph [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2008, 136: 1359.
- [6] GWODZDZ L G, JACHYMSKI J. IFS on a Metric Space with a Graph Structure and Extensions of the Kelisky-Rivlin Theorem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 356( 2 ): 453.
- [7] BOJOR F. Fixed Point of  $\varphi$ -Contraction in Metric Spaces Endowed with a Graph [J]. Annals of the University of Craiova, 2010, 37 ( 4 ): 85.
- [8] ALFURAIDAN M R, KHAMSI M A. Coupled Fixed Points of Monotone Mappings in a Metric Space with a Graph [J]. Fixed Point Theory, 2018, 19( 1 ): 3207.
- [9] BOONSRI N, SATIT S. Fixed Point Theorems for Contractions of Reich Type on a Metric Space with a Graph [J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2018, 20( 2 ): 84.
- [10] ABDUL L, NAZIR T, KUTBI M A. Common Fixed Point Results for Class of Set-Contraction Mappings Endowed with a Directed Graph [J]. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A, Matemáticas, 2019, 113( 4 ): 1.
- [11] FALLAHI K, RAD G S. Fixed Points of a  $\varphi$ -G-Contractive Mapping with Respect to a  $c$ -Distance on an Abstract Metric Space Endowed with a Graph [J]. Mathematical Notes, 2019, 105 ( 5 / 6 ): 781.
- [12] MONTHER R, MOSTAFA B, KHAMSI A. Almost Monotone Contractions Weighted Graphs [J]. Journal of Nonlinear Science and Application, 2016 ( 9 ): 5189.
- [13] ABBAS M, ALFURAIDAN M, NAZIR T. Common Fixed Points of Multivalued F-Contractions on Metric Spaces with a Directed Graph [J]. Carpathian J. Math., 2016, 32( 1 ): 1.
- [14] ALFURAIDAN R, KHAMSI M A. On Multivalued G-Monotone Ćirić and Reich Contraction Mappings [J], Filomat, 2017, 31: 3285.
- [15] GEORGE R, TAMRAKAR E, VUJAKOVIĆ J, et al.  $(C, \psi, G)$  Class of Contractions and Fixed Points in a Metric Space Endowed with a Graph [J]. Mathematics, 2019, 7( 5 ): 482.
- [16] CHEN L, ZOU J, ZHAO Y, ZHANG M. Iterative Approximation of Common Attractive Points of  $(\alpha, \beta)$ -Generalized Hybrid Set-Valued Mappings [J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2019, 21( 2 ): 58.
- [17] TAKAHASHI W. A Convexity in Metric Space and Nonexpansive Mappings [J]. Kodai Mathematical Journal, 1970, 22: 142.
- [18] NOROUZIAN M, ABKAR A. Tripartite Coincidence-Best Proximity Points and Convexity in Generalized Metric Spaces [J]. Bulletin Brazilian Mathematical Society 2019, 50( 4 ): 1.
- [19] GOEBAL K, KIRK W A. Iteration Processes for Nonexpansive Mapping [J]. Contemporary Math, 1983, 21: 115.
- [20] ĆIRIĆ L. On Some Discontinuous Fixed Point Mappings in Convex Metric Space [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 1993, 43( 2 ): 319.
- [21] GHOSH M K, DEHNATH L. Convergence of Ishikawa Iteration of Quasi-Nonexpansive Mappings [J]. Math Anal Appl, 1997, 207 ( 1 ): 96.
- [22] LIU Q. Iterative Sequence for Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mapping [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 259( 1 ): 1.
- [23] ĆIRIĆ L J B, UME J S. Multivalued Non-self-Mappings on Convex Metric Spaces [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 2005, 60( 6 ): 1053.
- [24] KHAN A R, FUKHARUDDIN H. Approximating Fixed Points of Some Maps in Uniformly Convex Metric Spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2010 ( 10 ): 1155.
- [25] CHAO W, JIN L, DAO Z. Convergence Theorems Fixed Point in Generalized Convex Metric Space [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2010 ( 10 ): 890.
- [26] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程. 下册第三版 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2013.

( 编辑: 温泽宇 )